/Теория вероятностей/ 2003

Данный материал подготовлен на принципах информационно-
нсультационного материала с целью закрепления у школьников и
удентов навыков практической реализации знаний, приобретённых
объёме курса по теме «Теория вероятностей». Настоящий материал
едусматривает широкую вариативность приёмов и методов
крепления полного курса в объёме семестра по разделу «Теория
роятностей» в «Высшей математике». Рекомендуется изучение
нного материала в сопоставлении всего объёма предложенных
шений.

В серии представлены консультационные пособия по следующим темам:

- Интегральное исчисление
- Дифференциальные уравнения
- Кратные интегралы
- Ряды
- Теория вероятностей
- Пределы
- ТФКП
- Аналитическая геометрия
- Линейная алгебра

Задача 1

Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что:

а) сумма числа очков не превосходит 3;

б) произведение числа очков не превосходит 3;

в) произведение числа очков делится на 3.

Составим две таблицы – сумм и произведений числа очков:

Сумма числа очков						
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Произведение числа очков						
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Поскольку выпадение на игральной кости любой цифры, от единицы до шестерки, является равновероятным событием, то также равновероятным событием является выпадение любой комбинации из двух цифр на двух игральных костях. Тогда становится возможным применение классического определения вероятности, как отношения числа благоприятных исходов к числу возможных. Исходя из этого, определим искомые вероятности:

а) вероятностью того, что сумма числа очков не превосходит 3, является отношение числа ячеек, число в которых не превышает 3, к общему числу ячеек в таблице сумм, равному 36:

$$P_A = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Аналогичным образом определяем остальные вероятности:

б) $P_Б = \dfrac{5}{36}$;

в) $P_В = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$.

Задача 2

Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-го сорта равно n_i, i=1,2,3,4. Для контроля наудачу берутся m изделий. Определить вероятность того, что среди них m_1 первосортных, m_2, m_3, m_4 второго, третьего и четвертого сорта соответственно $\left(\sum_{i=1}^{4} m_i = m, \sum_{i=1}^{4} n_i = n\right)$.

n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4
4	2	3	2	2	1	2	1

Существует C_n^k способов выбрать произвольное k-элементное неупорядоченное подмножество из неупорядоченного n-элементного множества, следовательно, существует всего C_n^m способов выбрать m из n изделий, не учитывая порядок, в котором они будут выбираться.

Согласно основному принципу комбинаторики, существует $C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1$ способов составить требуемую в условии выборку.

Тогда, используя классическое определение вероятности, приходим к выводу, что искомая вероятность P определяется по следующей формуле:

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{11}^6} = \frac{4!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 5!\cdot 6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 11!} \approx 0{,}156$$

Ответ: $P \approx 0{,}156$

Задача 3

Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

n	l	m	k
12	2	8	3

Существует C_n^k способов выбрать произвольное k-элементное неупорядоченное подмножество из неупорядоченного n-элементного множества, следовательно, существует всего C_n^m способов выбрать m из n билетов, не учитывая порядок, в котором они будут выбираться.

Согласно основному принципу комбинаторики, существует $C_3^2 \cdot C_9^6$ способов составить требуемую в условии выборку.

Тогда, используя классическое определение вероятности, приходим к выводу, что искомая вероятность P определяется по следующей формуле:

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_9^6}{C_{12}^8} = \frac{3!\cdot 9!\cdot 8!\cdot 4!}{2!\cdot 1!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 12!} \approx 0{,}509$$

Ответ: $P \approx 0{,}509$

Задача 4

В лифт k-этажного дома сели n пассажиров (n· k). Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что:

а)все вышли на разных этажах (событие А);

б)по крайней мере, двое сошли на одном этаже(событие В).

k	n
14	3

Рассмотрим случай а). Всего существует $(k-1)^n$ способов распределить пассажиров по этажам. Однако, чтобы все пассажиры вышли на разных этажах, каждый последующий пассажир должен выходить на этаже, на который не выходил ни один из ранее вышедших. Таким образом, каждый пассажир уменьшает число этажей, «разрешенных» для следующего пассажира на единицу. Согласно основному принципу комбинаторики, число способов распределить n пассажиров по (k-1) этажам будет вычисляться по следующей формуле:

$$(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)\cdot\ldots\cdot(k-n)=\frac{(k-1)!}{(k-1-n)!}=A_{k-1}^{n}$$

Таким образом, вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах, равна:

$$P(A)=\frac{A_{13}^{3}}{13^{3}}=\frac{13!}{13^{3}10!}\approx 0{,}781$$

Случаи, когда хотя бы два пассажира выходят на одном этаже и когда все пассажиры выходят на разных этажах являются несовместными событиями, а в сумме образуют достоверное событие. Таким образом:

$$P(B)=1-P(A)\approx 0{,}219$$

Ответ: $P(A)\approx 0{,}781$

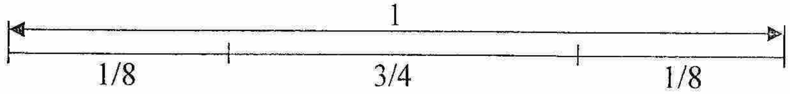
$P(B)\approx 0{,}219$

Задача 5

В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до обоих концов отрезка превосходит величину 1/k.

k = 8

Схематично покажем единичный отрезок и точки, отстоящие от его концов на 1/8:



Отрезок, заключенный между этими точками, характеризуется тем, что любая его точка отстоит от обоих концов единичного отрезка более чем на 1/8. Таким образом, вероятность того, что расстояние от точки, появляющейся наугад на единичном отрезке, до обоих концов отрезка превосходит величину 1/8 равна вероятности того, что эта точка появляется в пределах центрального отрезка, длина которого составляет 3/4.

Используем геометрическое определение вероятности. Поскольку мы рассматриваем отрезки, т.е. одномерный случай, то примем за меру длину отрезка. Тогда вероятность того, что точка, появляющаяся наудачу на единичном отрезке, попадет в центральный отрезок, равна отношению длин центрального и единичного отрезка, т.е.:

$$P=\frac{3/4}{1}=\frac{3}{4}$$

Ответ: $P=\dfrac{3}{4}$

Задача 6

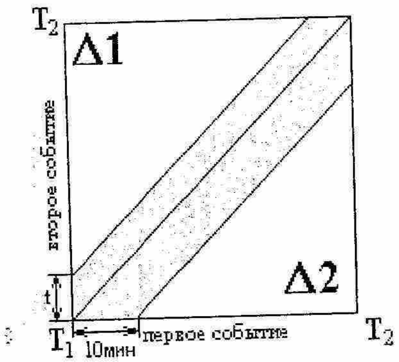
Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от T_1 до T_2. Одно из событий длится 10 мин, другое – t мин. Определить вероятность того, что:

а) события «перекрываются» по времени (событие A);

б) события «не перекрываются» по времени (событие B).

T_1	T_2	t
10^{00}	10^{30}	15

Построим область, точки которой будут соответствовать всем возможным комбинациям моментов начал событий. Горизонтальная ось будет соответствовать началу первого события, а вертикальная – второго.



Закрашенная область соответствует таким сочетаниям моментов начал событий, при которых сами события будут «перекрываться» по времени, так как признаком «перекрытия» является то, что моменты начала событий отстоят друг от друга менее, чем на длительность события, размещающегося на оси времени первым.

Применив геометрическое определение вероятности и взяв в качестве меры площадь, можно прийти к выводу, что вероятность отсутствия «перекрытия» по времени равна отношению суммы площадей треугольников Δ1 и Δ2 к общей площади построенной области:

$$P(B) = \frac{S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2}}{(T_2 - T_1)^2} = \frac{(10^{30} - 10^{00} - 0^{10})^2 + (10^{30} - 10^{00} - t)^2}{2(10^{30} - 10^{00})^2} \approx 0{,}653$$

Соответственно, вероятность «перекрытия» определяется, как вероятность противоположного события:

$$P(A) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) \approx 0{,}347$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}347$; $P(B) \approx 0{,}653$.

Задача 7

В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S_1 и S_2.

R	S_1	S_2
11	2,29	3,52

Будем считать, что фигуры полностью принадлежат кругу.

Назовем попадание точки в фигуру площадью S_1 событием A, в фигуру площадью S_2 – событием B, а в любую из фигур – событием C. C = A + B.

Поскольку фигуры не пересекаются, то попадания точки в первую и во вторую являются несовместными событиями. Тогда по формуле сложения вероятностей:

$$P(C) = P(A) + P(B)$$

Используем геометрическое определение вероятности. Так как мы рассматриваем двумерный случай, то в качестве меры следует взять площадь. Тогда вероятность попадания точки в каждую из фигур будет равна отношению площади фигуры к площади круга, в котором появляется точка:

$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{S_1}{\pi R^2} \\ P(B) = \dfrac{S_2}{\pi R^2} \end{cases} \Rightarrow P(C) = \frac{S_1 + S_2}{\pi R^2} = \frac{2{,}29 + 3{,}52}{\pi \cdot 11^2} \approx 0{,}015$$

Ответ: $P(C) \approx 0{,}015$

Задача 8

В двух партиях k_1 и k_2% доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них:
а)хотя бы одно бракованное (событие A);
б)два бракованных (событие B);
в)одно доброкачественное и одно бракованное(событие C);

k_1	k_2
85	33

По сути, процент доброкачественных изделий в партии – это вероятность того, что одно наугад взятое из этой партии изделие окажется доброкачественным. Найдем вероятность того, что оба взятых изделия являются доброкачественными, т.е. вероятность события $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = \frac{k_1}{100}\cdot\frac{k_2}{100} = \frac{85}{100}\cdot\frac{33}{100} = 0{,}2805$$

Отсюда легко найти вероятность события A:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}2805 = 0{,}7195$$

Зная вероятность того, что взятое наугад изделие будет доброкачественным, легко определить вероятность того, что оно будет бракованным – 15% и 67% для первой и второй партий соответственно.

Тогда вероятность того, что оба изделия являются бракованными, находится по следующей формуле:

$$P(B) = \frac{15}{100}\cdot\frac{67}{100} = 0{,}1005$$

Чтобы определить вероятность события C можно воспользоваться взаимосвязью между событиями A, B и C, а также тем, что P(A) и P(B) уже известны. Из условия видно, что верна следующая формула:

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

Отсюда:

$$P(C) = P(A) - P(B) = 0{,}7195 - 0{,}1005 = 0{,}619$$

Ответ: $P(A) = 0{,}7195$; $P(B) = 0{,}1005$; $P(C) = 0{,}619$;

Задача 9

Вероятность того, что цель была поражена при одном выстреле первым стрелком p_1, вторым – p_2. Первый сделал n_1, второй – n_2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

p_1	p_2	n_1	n_2
0,69	0,46	2	3

Для того, чтобы цель после всех выстрелов не была поражена, требуется, чтобы оба стрелка при каждом выстреле промахнулись. Чтобы вычислить вероятность этого события, нужно найти вероятность промаха. Зная вероятность попадания, это несложно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}46 = 0{,}54$$

Теперь, применяя теорему об умножении вероятностей, найдем для каждого стрелка вероятность промаха при каждом выстреле:

$$P_1 = q_1^{n_1} = 0{,}31^2 \approx 0{,}096$$
$$P_2 = q_2^{n_2} = 0{,}54^3 \approx 0{,}157$$

Чтобы определить вероятность того, что цель осталась не пораженной после всех выстрелов, в силу теоремы об умножении вероятностей, требуется перемножить вероятности того, что цель осталась не пораженной после выстрелов первого и второго стрелков:

$$P = P_1 \cdot P_2 \approx 0{,}096 \cdot 0{,}157 \approx 0{,}0151$$

Ответ: $P \approx 0{,}0151$

Задача 10

Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает герб. Первый бросок делает игрок A, второй – B, третий – A и т.д.

а) найти вероятность победы A не позднее k-го броска;

б) каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

(k = 4)

Вероятности выпадения герба и цифры для монеты являются одинаковыми и равными ½. Тогда вероятность того, что A выиграл на первом броске, равна ½. Если после этого B проиграет (вероятность ½), то с вероятностью ½ A может выиграть на втором своем броске, т.е. вероятность победы A на втором броске равна $(½)^3$. Т. о. вероятность победы A на k-м броске находится по формуле $(½)^{2k-1}$. Чтобы найти вероятность победы не позднее 4-го броска, необходимо сложить вероятности победы на 1-м, 2-м, …, 4-м броске, т.е.:

$$P = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2^{2n-1}} \approx 0{,}664$$

Чтобы найти вероятность победы A при сколь угодно длительной игре, следует положить $k \to \infty$. Тогда вероятность можно вычислить по правилу нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \frac{b}{1-q}$$

В нашем случае:

$$b = \frac{1}{2};\ q = \frac{1}{4};\ P_A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Соответственно, вероятность победы игрока B:

$$P_B = 1 - P_A = 1 - {}^{2}\!/_{3} = {}^{1}\!/_{3}$$

Ответ: $P \approx 0{,}664$; $P_A = 2/3$; $P_B = 1/3$;

Задача 11

Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от 1 до M. Шары извлекаются по одному без возвращения. (M = 3)

Рассматриваются следующие события:

A – номера извлекаемых шаров образуют последовательность 1,2,…,M;

B – хотя бы раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения;

C – нет совпадений номера шара и порядкового номера извлечения.

Определить вероятности событий A,B,C. Найти вероятности при $M\to\infty$.

Для того, чтобы номера всех шаров совпали с порядковыми номерами извлечения, требуется каждый раз вытаскивать строго определенный шар. Вероятность этого при наличии n шаров в урне равна 1/n. Тогда:

$$P(A) = \frac{1}{M}\cdot\frac{1}{M-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{M!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Так как совпадения номеров являются совместными событиями, то P(B) вычисляется по теореме сложения вероятностей (B_i – событие совпадения i-го шара с i-м номером):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{M} P(B_i) - \sum_{i_2=2}^{M}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} P(B_{i_1}B_{i_2}) + \sum_{i_3=3}^{M}\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} P(B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}) - \ldots$$

Рассмотрим слагаемые этой формулы поподробнее:

$$P(B_i) = \frac{M-1}{M}\cdot\frac{M-2}{M-1}\cdot\ldots\cdot\frac{M-i+1}{M-i+2}\cdot\frac{1}{M-i+1} = \frac{1}{M};\ \sum_{i=1}^{M} P(B_i) = M\cdot\frac{1}{M} = 1$$

$$P(B_{i_1}B_{i_2}) = \underbrace{\frac{M-2}{M}\cdot\frac{M-3}{M-1}\cdot\ldots\cdot\frac{M-i_1}{M-i_1+2}\cdot\frac{1}{M-i_1+1}}_{1/(M-1)}\cdot\frac{M-i_1-1}{M-i_1}\cdot\frac{M-i_1-2}{M-i_1-1}\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot\frac{M-i_1-i_2+1}{M-i_1-i_2+2}\cdot\frac{1}{M-i_1-i_2+1} = \frac{1}{M(M-1)} = \frac{(M-2)!}{M!};\ \sum_{i_1=1}^{i_2-1}\sum_{i_2=2}^{M} P(B_{i_1}B_{i_2}) = \frac{C_M^2(M-2)!}{M!}$$

Остальные слагаемые рассматриваются аналогично. Запишем исходную формулу в более простом виде и подставим числа:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{M} \frac{(-1)^{i+1}C_M^i(M-i)!}{M!} = \sum_{i=1}^{M}\frac{(-1)^{i+1}}{i!} = \sum_{i=1}^{3}\frac{(-1)^{i+1}}{i!} = \frac{2}{3}$$

События B и C являются несовместными событиями, из чего следует формула для вероятности события C:

$$P(C) = 1 - P(B) \approx 1 - 2/3 \approx 1/3$$

Найдем предельные значения вероятностей при $M \to \infty$:

$$\lim_{M\to\infty} P(A) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M!} = 0;\ \lim_{M\to\infty} P(B) = \lim_{M\to\infty}\sum_{i=1}^{M}\frac{(-1)^{i+1}}{i!} = 1 - 1/e;$$

$$\lim_{M\to\infty} P(C) = 1 - \lim_{M\to\infty} P(B) = 1/e;$$

Ответ: P(A) = 1/6; P(B) = 2/3; P(C) = 1/3.

Задача 12

Из 1000 ламп n_i принадлежат i-й партии, i = 1, 2, 3, $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

n_1	n_2
630	230

Выразим через n_1 и n_2 число ламп в третьей партии, зная, что общее число ламп равняется 1000:

$$n_3 = 1000 - n_1 - n_2 = 1000 - 630 - 230 = 140$$

Определим вероятности того, что взятая наугад лампа принадлежит к первой (событие A_1), второй (событие A_2) или третьей (событие A_3) партии:

$$P(A_1) = \frac{n_1}{1000} = \frac{63}{100}$$

$$P(A_2) = \frac{n_2}{1000} = \frac{23}{100}$$

$$P(A_3) = \frac{n_3}{1000} = \frac{7}{50}$$

Зная вероятность выбора бракованной лампы в каждой из партий, можно, применив формулу полной вероятности, определить вероятность выбора бракованной лампы в целом:

$$P = 0{,}06 \cdot P(A_1) + 0{,}05 \cdot P(A_2) + 0{,}04 \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}06 \cdot \frac{63}{100} + 0{,}05 \cdot \frac{23}{100} + 0{,}04 \cdot \frac{7}{50} = 0{,}0549$$

Ответ: P=0,0549

Задача 13

В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй N_2 белых и M_2 черных. Из первой во вторую переложено K шаров, затем из второй урны извлечен один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар – белый.

N_1	M_1	N_2	M_2	K
1	9	3	3	4

Для решения этой задачи следует воспользоваться формулой полной вероятности. Нам придется рассмотреть полную группу попарно несовместных событий, представляющих собой случаи разного количества белых шаров, перемещаемых из первой урны во вторую. Будем обозначать их N=n, где n – количество белых шаров среди K перемещаемых.

$$P = \sum_{n=0}^{K} P(N=n)P(A_n) = \sum_{n=0}^{1} P(N=n)P(A_n)$$

Рассмотрим каждый из множителей:

P(N=n) – вероятность в числе 4 шаров из первой урны набрать n белых. Ее легко определить, используя понятие сочетания из x элементов по y:

$$P(N=n) = \frac{C_1^n \cdot C_9^{4-n}}{C_{10}^4}$$

$P(A_n)$ – вероятность взять из второй урны белый шар, если в нее добавили n белых и K-n черных шаров:

$$P(A_n) = \frac{3+n}{3+3+4} = \frac{3+n}{10}$$

Тогда:

$$P = \sum_{n=0}^{1} P(N=n)P(A_n) = \sum_{n=0}^{1} \frac{C_1^n \cdot C_9^{4-n}}{C_{10}^4} \cdot \frac{3+n}{10} =$$

$$= 0{,}34$$

Ответ: P=0,34

Задача 14

В альбоме k чистых и l гашеных марок. Из них наудачу извлекаются m марок (среди которых могут быть и чистые и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается n марок. Определить вероятность того, что все n марок чистые.

k	l	m	n
10	7	4	1

Для решения этой задачи также следует использовать формулу полной вероятности. Случаи, когда среди 4 извлеченных марок оказывается от 0 до 4 негашеных, образуют полную группу попарно несовместных событий. Назовем их событиями A_i, где i – это количество извлеченных негашеных марок.

Вероятность извлечения i негашеных марок среди 4 случайно извлеченных определяется с помощью уже знакомых формул комбинаторики:

$$P(A_i) = \frac{C_{10}^{i} \cdot C_{7}^{4-i}}{C_{17}^{4}} = \frac{10!7!4!13!}{i!(10-i)!(4-i)!(3+i)!17!}$$

Так как все извлеченные чистые марки подвергаются спецгашению, то для каждого случая A_i меняется вероятность извлечения чистой марки. После гашения в альбоме оказывается (10-i) чистых марок и (7+i) гашеных. Вероятность извлечения чистой марки при i погашенных в первый раз (событие B_i) определяется несложно:

$$P(B_i) = \frac{C_{10-i}^{1} \cdot C_{7+i}^{0}}{C_{17}^{1}} = \frac{(10-i)!16!}{(9-i)!17!}$$

Применим формулу полной вероятности:

$$P = \sum_{i=0}^{m} P(A_i)P(B_i) = \sum_{i=0}^{4}\left[\frac{10!7!4!13!}{i!(10-i)!(4-i)!(3+i)!17!} \cdot \frac{(10-i)!16!}{(9-i)!17!}\right] \approx 0,45$$

Ответ: $P \approx 0,45$

Задача 15

В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i-й завод поставляет m_i% изделий (i = 1, 2, 3). Среди изделий i-го завода n_i% первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено j-м заводом.

m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	j
40	30	30	80	80	90	3

Для решения этой задачи следует применить формулы Байеса. Обозначим покупку первосортного изделия, как событие A, а событиями H_k – то, что купленное изделие выпущено k-м заводом. События H_k образуют полную группу попарно несовместных событий. Тогда формулы Байеса дают следующее выражение:

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Рассмотрим вероятности, входящие в эту формулу.

$P(H_3)$ представляет собой вероятность того, что купленное изделие выпущено 3-м заводом и равна 30%.

$P(A/H_3)$ – это вероятность того, что изделие является первосортным, при условии, что произведено 3-м заводом. Тогда легко заметить, что эта вероятность равна 90%.

Таким образом, формулу для искомой вероятности можно записать в следующем виде:

$$P(H_3/A) = \frac{m_3 n_3}{\sum_{i=1}^{3} m_i n_i} = \frac{30 \cdot 90}{40 \cdot 80 + 30 \cdot 80 + 30 \cdot 90} \approx 0,325$$

Ответ: $P(H_3/A) \approx 0,325$

Задача 16

Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает n раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет m раз.

n	m
6	4

Вероятности выпадения герба и цифры равны ½. n-й герб должен завершать последовательность, значит, нужно найти вероятность, что в серии из (n+m–1) бросков выпадет m цифр и (n–1) гербов и умножить ее на ½ (вероятность выпадения n-го герба). Используем для этого формулу Бернулли:

$$P_9(4) = \frac{1}{2}C_9^4p^4q^5 = \frac{1}{2}\frac{9!}{4!5!}\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{63}{512} \quad (p = q = \frac{1}{2})$$

Ответ: $P_9(4)=63/512$.

Задача 17

Вероятность выигрыша в лотерее на один билет равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

p	n
0,4	14

При биномиальном распределении вероятностей, имеющем здесь место, наивероятнейшее число успехов определяется следующим образом:

$$(n+1)\cdot p = 15\cdot 0{,}4 = 6 - \text{целое число} \Rightarrow m_0 = \left[\begin{array}{l}(n+1)\cdot p - 1 = 5\\ (n+1)\cdot p = 6\end{array}\right.$$

Найдем вероятность выпадения m_0 успехов, т.е. покупки наивероятнейшего числа выигравших билетов (не играет роли, которое из полученных m_0 будет взято):

$$P_n(m_0) = P_{14}(5) = C_{14}^5p^5q^9 = C_{14}^5p^5(1-p)^9 = \frac{14!}{5!9!}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^9 \approx$$

$$\approx 0{,}207$$

Ответ: $m_0 = 5$ или 6; $P_n(m_0) \approx 0{,}207$.

Задача 18

На каждый лотерейный билет с вероятностью p_1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью p_2 – мелкий выигрыш и с вероятностью p_3 билет может оказаться без выигрыша, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. Куплено n билетов. Определить вероятность получения n_1 крупных выигрышей и n_2 мелких.

n	n_1	n_2	p_1	p_2
15	2	1	0,14	0,16

Для того, чтобы решить эту задачу, следует применить формулу для полиномиального распределения вероятностей. Требуется найти вероятность того, что в n испытаниях n_1 исходов будет благоприятны для события с вероятностью p_1, n_2 – для события с вероятностью p_2, а $(n-n_1-n_2)$ – для события с вероятностью $(1-p_1-p_2)$:

$$P_{15}(2,1,12) = \frac{15!}{2!1!12!}\cdot 0{,}14^2\cdot 0{,}16^1\cdot 0{,}7^{12} \approx 0{,}059$$

Ответ: $P_{15}(2,1,12)\approx 0{,}059$

Задача 19

Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна p. Поступило n вызовов. Определить вероятность m «сбоев».

m	n	p
7	1000	0,01

Так как n велико, то для биномиального распределения следует применять приближенную формулу следующего вида:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, q = 1-p$$

Подставив в эту формулу значения m, n и p, численно определим искомую вероятность:

$$P_n(m) \approx 0{,}0805$$

Ответ: $P_n(m) \approx 0{,}0805$

Задача 20

Вероятность наступления некоторого события в каждом из n независимых испытаний равна p. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет следующему неравенству: $k_1 \le m \le k_2$

n	p	k_1	k_2
100	0,75	65	80

Для такого биномиального распределения следует применять приближенные формулы. Поскольку npq>9, то будем использовать асимптотику Муавра-Лапласа:

$$P_n(x_1 \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le x_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

Свяжем, используя эту формулу, x_1 и x_2 с k_1 и k_2:

$$P_n(\underbrace{x_1\sqrt{npq} + np}_{k_1} \le m \le \underbrace{x_2\sqrt{npq} + np}_{k_2}) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Выразим x_1 и x_2 через k_1 и k_2:

$$x_1\sqrt{npq} + np = k_1 \Rightarrow x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{65-75}{\sqrt{18{,}75}} \approx \frac{-10}{\sqrt{18{,}75}} \approx -2{,}31$$

$$x_2\sqrt{npq} + np = k_2 \Rightarrow x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{80-75}{\sqrt{18{,}75}} \approx \frac{5}{\sqrt{18{,}75}} \approx 1{,}15$$

Запишем приближенную формулу в виде, удовлетворяющем условию задачи:

$$P_{100}(65 \le m \le 80) \approx \Phi(1{,}15) - \Phi(-2{,}31) \approx 0{,}375 + 0{,}49 \approx 0{,}865$$

Ответ: $P_{100}(65 \le m \le 80) \approx 0{,}865$

Задача 21

Дана плотность распределения p(x) случайной величины ξ. Найти параметр γ, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, функцию распределения случайной величины ξ, вероятность выполнения равенства $x_1<\xi<x_2$.

$$p(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b], \\ 0, & x \notin [\gamma, b]. \end{cases}$$

a	b	x_1	x_2
1	1,8	1,3	1,6

Случайная величина ξ распределена непрерывно. Зная, что интеграл от плотности распределения по всей оси x равен единице, найдем параметр γ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_\gamma^b a dx = ax \Big|_\gamma^b = a(b-\gamma) = 1 \Rightarrow \gamma = b - \frac{1}{a} = 1{,}8 - 1 = 0{,}8$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины можно определить следующим образом:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)dx = \int_\gamma^b axdx = \frac{ax^2}{2}\Big|_\gamma^b = \frac{a(b^2-\gamma^2)}{2} = \frac{1\cdot(3{,}24-0{,}64)}{2} = 1{,}3$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия вычисляется по следующей формуле:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2 p(x)dx = \int_\gamma^b (x^2 - 2xM\xi + M^2\xi)p(x)dx =$$

$$= a\left[\frac{b^3-\gamma^3}{3} - (b^2-\gamma^2)M\xi + (b-\gamma)M^2\xi\right]$$

$$= 1\cdot\left[\frac{5{,}832-0{,}512}{3} - (3{,}24-0{,}64)\cdot 1{,}3 + (1{,}8-0{,}8)\cdot 1{,}69\right] \approx 0{,}083$$

Найдем функцию распределения случайной величины ξ:

$$F(x \in [\gamma, b]) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_\gamma^x adx = a(x-\gamma); F(x<\gamma) = 0; F(x>b) = 1$$

Определим вероятность выполнения равенства $x_1<\xi<x_2$:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = a(x_2 - x_1) = 1\cdot(1{,}6-1{,}3) = 0{,}3$$

Ответ: $\gamma = 0{,}8$; $M\xi = 1{,}3$; $D\xi \approx 0{,}083$; $P(x_1<\xi<x_2) = 0{,}3$.

Задача 22

Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $p(x) = \gamma e^{ax^2+bx+c}$. Найти: γ, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, функцию распределения случайной величины ξ, вероятность выполнения неравенства $x_1<\xi<x_2$.

a	b	c	x_1	x_2
–2	–4/3	2/3	–1/3	2/3

Для начала произведем следующее преобразование p(x):

$$p(x) = \gamma e^{-2x^2-4x/3+2/3} = \gamma e^{-2(x+1/3)^2+8/9}$$

Следует заметить, что выражение для p(x) напоминает плотность вероятности нормального распределения. Подберем соответствующий параметр γ:

$$\gamma e^{-2(x+1/3)^2+8/9} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x+1/3)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow -2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2};$$

$$\gamma = \frac{e^{-8/9}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \approx 0{,}328$$

Так как мы пришли к нормальному закону распределения, то можем установить его параметры из формулы для p(x):

$$M\xi = -\frac{1}{3}; D\xi = \sigma^2 = \frac{1}{4}$$

Функцию распределения случайной величины ξ можно найти следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1/3)^2}{0,5}} dx = \{y = 2(x+1/3)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{2(x+1/3)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0{,}5 + \Phi(y) = 0{,}5 + \Phi[2(x+1/3)]$$

Теперь найти вероятность выполнения неравенства $x_1<\xi<x_2$ несложно:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi(2) - \Phi(0) \approx 0{,}477$$

Ответ: $\gamma \approx 0{,}328$; $M\xi = -1/3$; $D\xi = 1/4$; $P(x_1<\xi<x_2) \approx 0{,}477$;
$F(x) = 0{,}5 + \Phi[2(x+1/3)]$.

Задача 23

По данному закону распределения случайной величины найти характеристическую функцию $\varphi(t)$, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ случайной величины ξ.

n	p
4	0,25

Закон распределения:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1; k = 0,1,\ldots,n.$$

Так как ξ – случайная величина, распределенная дискретно, то найдем характеристическую функцию через формулу для дискретной случайной величины:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itx_k} P_k = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \{\text{используем формулу}$$

$$\text{бинома Ньютона}\} = (e^{it}p + 1 - p)^n = (0{,}25e^{it} + 0{,}75)^4$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется следующим образом:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} x_k P_k = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}25 = 1$$

Дисперсия дискретной случайной величины определяется через математическое ожидание этой величины:

$$D\xi = \sum_{k=0}^{n} (x_k - M\xi)^2 P_k = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 \frac{n!}{k!(n-p)!} p^k (1-p)^{n-k} = (1-p) \cdot n \cdot p =$$

$$= 0{,}75 \cdot 4 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$$

Ответ: $\varphi(t) = (0{,}25e^{it}+0{,}75)^4$
$M\xi = 1$
$D\xi = 0{,}75$

Задача 24

Зная закон распределения случайной величины ξ, найти характеристическую функцию $\varphi(t)$, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ случайной величины ξ.

Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда плотность вероятности описывается следующим образом:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

a	b
4	7

Характеристическая функция непрерывно распределенной случайной величины находится с помощью прямого преобразования Фурье:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p(x)dx=\int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{it(b-a)}e^{itx}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita})=\frac{1}{3it}(e^{7it}-e^{4it})$$

Для равномерного распределения математическое ожидание найти несложно:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}=$$

$$=\frac{4+7}{2}=\frac{11}{2}$$

Теперь найдем дисперсию случайной величины ξ:

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2p(x)dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(a+b)x^2}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2x}{4(b-a)}\right]\Bigg|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{343-64}{3(7-4)}-\frac{(7+4)^2}{2}+\frac{(7+4)^2}{4}=\frac{3}{4}$$

Ответ: $\varphi(t)=\frac{1}{3it}(e^{7it}-e^{4it})$; $M\xi=11/2$; $D\xi=3/4$.

Задача 25

Дана плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ. Найти плотность распределения $p_\eta(y)$, математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η, которая представляет собой площадь круга радиуса ξ.

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

a	b
3	5

Для начала следует выразить η через ξ и наоборот:

$$\eta=\varphi(\xi)=\pi\xi^2;\quad \xi=\Psi(\eta)=\sqrt{\eta/\pi};$$

Найдем плотность распределения $p_\eta(y)$:

$$a\le\sqrt{y/\pi}\le b\Rightarrow a\sqrt{\pi}\le\sqrt{y}\le b\sqrt{\pi}\Rightarrow 9\pi\le y\le 25\pi$$

$$p_\eta(y)=p_\xi[\Psi(y)]|\Psi'(y)|=\begin{cases}1/4\sqrt{\pi y}, & y\in[9\pi;25\pi]\\ 0, & y\notin[9\pi;25\pi]\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание $M\eta$:

$$M\eta=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot p_\eta(y)dy=\int_{9\pi}^{25\pi}\frac{y^{1/2}}{4\sqrt{\pi}}dy=\frac{y^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}\Big|_{9\pi}^{25\pi}=\frac{49}{3}\pi$$

Найдем дисперсию $D\eta$:

$$D\eta=\int_{-\infty}^{\infty}(y-M\eta)^2\cdot p_\eta(y)dy=\int_{9\pi}^{25\pi}\frac{(y-M\eta)^2}{4\sqrt{\pi y}}dy=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{9\pi}^{25\pi}\left(y^{3/2}-2y^{1/2}M\eta+y^{-1/2}M^2\eta\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{y^{5/2}}{5}-\frac{2y^{3/2}M\eta}{3}+y^{1/2}M^2\eta\right)\Bigg|_{9\pi}^{25\pi}=\frac{964}{45}\pi^2$$

Ответ: $p_\eta(y)=\begin{cases}1/4\sqrt{\pi y}, & y\in[9\pi;25\pi]\\ 0, & y\notin[9\pi;25\pi]\end{cases}$; $M\eta=49\pi/3$; $D\eta=964\pi^2/45$.

Задача 26

Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, указанную в задаче 25. Другая случайная величина η связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^m + 1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

a	b	m
3	5	4

Сначала требуется найти плотность распределения случайной величины η:

$$\eta = \varphi(\xi) = 2\xi^m + 1 \Rightarrow \xi = \Psi(\eta) = \sqrt[m]{(\eta-1)/2}$$

$$p_\eta(y) = p_\xi[\Psi(y)]|\Psi'(y)| = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[m]{y-1}}{m\sqrt[m]{2}(y-1)(b-a)} & y \in [\varphi(a), \varphi(b)] \\ 0 & y \notin [\varphi(a), \varphi(b)] \end{cases}$$

Теперь можно найти математическое ожидание $M\eta$:

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_\eta(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{y\sqrt[m]{y-1}}{m\sqrt[m]{2}(y-1)(b-a)}dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left(\frac{(y-1)^{1/m}}{m\sqrt[m]{2}(b-a)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(y-1)^{(1-m)/m}}{m\sqrt[m]{2}(b-a)} \right) d(y-1) = \frac{1}{\sqrt[m]{2}(b-a)} \left(\frac{(y-1)^{(m+1)/m}}{m+1} + (y-1)^{1/m} \right) \Bigg|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[m]{2}(b-a)} \left(\frac{(2x^m)^{\frac{m+1}{m}}}{m+1} + (2x^m)^{1/m} \right) \Bigg|_{x=a}^{x=b} = \frac{2(b^{m+1} - a^{m+1})}{(b-a)(m+1)} + 1 = \frac{2887}{5}$$

Найдем дисперсию $D\eta$:

$$D\eta = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M\eta)^2 p_\eta(y)dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{(y^2 - 2yM\eta + M^2\eta)\sqrt[m]{y-1}}{m\sqrt[m]{2}(y-1)(b-a)}dy =$$

$$= \frac{2(M\eta-1)^2 m^2 + (y^2 + (2-4M\eta)y + 3M^2\eta - 2M\eta)m + (y-M\eta)^2}{\sqrt[m]{2}(b-a)(2m+1)(m+1)(y-1)^{-1/m}} \Bigg|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \approx$$

$\approx 97416{,}8$

Задача 27

Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$. Найти плотность распределения вероятностей $p_\eta(y)$ случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$.

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} x}; \quad \eta = |\xi|$$

Т.к. $\eta = |\xi|$, то $p_\eta[y \notin (0;\infty)] = 0$. Рассмотрим область $y \in (0;\infty)$:

$$p_\eta(y) = F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{\varphi(x)<y} p_\xi(x)dx \right) = \frac{d}{dy}\left(\int_B \frac{dx}{\pi \operatorname{ch} x} \right)$$

$$B = \{x \mid |x| < y\} = (-y; y)$$

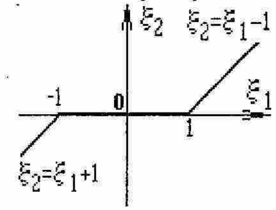
$$p_\eta(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{-y}^{y} \frac{dx}{\pi \operatorname{ch} x} \right) = \frac{2}{\pi \operatorname{ch} y}$$

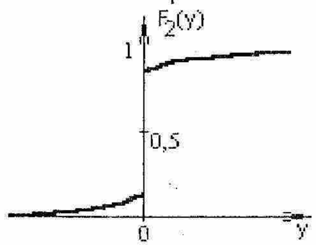
Ответ:

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \operatorname{ch} y} & y \in (0;\infty) \\ 0 & y \notin (0;\infty) \end{cases}$$

Задача 28

По заданной плотности распределения $p_1(x)$ случайной величины ξ_1 определить функцию распределения случайной величины $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. Функция $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$ задана графически. Построить график функции распределения и, используя дельта-функцию, найти выражение для плотности распределения $p_2(y)$ случайной величины ξ_2.





$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$P(\xi_2 = 0) = P(\xi_1 \in [-1;1]) \approx 2\Phi(1)$$

$$x < 0: P(\xi_2 < x) = P(\xi_1 < x-1) \approx 0{,}5 + \Phi(x-1)$$

$$x > 0: P(\xi_2 < x) = P(\xi_1 < x+1) \approx 0{,}5 + \Phi(x+1)$$

Построим график функции распределения и найдем выражение для плотности распределения $p_2(y)$ случайной величины ξ_2:

$$p_2(y) = \tfrac{d}{dy} F_2(y) = \delta(x) \cdot 2\Phi(1) +$$

$$+ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+|x|)^2/2}$$

Ответ: $p_2(y) = \delta(x) \cdot 2\Phi(1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+|x|)^2/2}$

Задача 29

По заданной плотности распределения $p_\xi(x_1,x_2)$ двумерной случайной величины (ξ_1,ξ_2) найти плотность распределения $p_\eta(x_1,x_2)$ двумерной случайной величины (η_1,η_2), связанной взаимно однозначно с (ξ_1,ξ_2) указанными ниже соотношениями.

$$p_\xi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\right)}$$

a	b	n
5	1	2

$$\xi_1=a\eta_1\cos n\eta_2;\ \xi_2=b\eta_1\sin n\eta_2;\ 0\le\eta_1<\infty;\ 0\le\eta_2<2\pi/n.$$

Плотности вероятностей двумерных случайных величин связаны следующим соотношением:

$p_\eta(y_1,y_2)=p_\xi[\varphi_1(y_1,y_2),\varphi_2(y_1,y_2)]\cdot|I|$, где I – якобиан

$$\varphi_1(y_1,y_2)=ay_1\cos 2y_2;\ \varphi_2(y_1,y_2)=by_1\sin 2y_2$$

Вычислим якобиан, присутствующий в этом выражении:

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos 2y_2 & -\frac{ay_1}{2}\sin 2y_2\\ b\sin 2y_2 & \frac{by_1}{2}\cos 2y_2\end{vmatrix}=2aby_1\cos^2 2y_2+$$

$$+2aby_1\sin^2 2y_2=2aby_1$$

Т.к. a>0, b>0 и n>0, то $|I|=2ab|y_1|$.

Рассмотрим функцию $p_\xi[\varphi_1(y_1,y_2),\varphi_2(y_1,y_2)]$:

$$p_\xi[\varphi_1(y_1,y_2),\varphi_2(y_1,y_2)]=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_1^2(y_1,y_2)}{a^2}+\frac{\varphi_2^2(y_1,y_2)}{b^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{y_1^2}{2}(\cos^2 ny_2+\sin^2 ny_2)}=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{y_1^2}{2}}$$

Подставим в исходную формулу найденные значения:

$$p_\eta(y_1,y_2)=\left(\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{y_1^2}{2}}\right)\cdot 2ab|y_1|=\frac{|y_1|}{\pi}e^{-\frac{y_1^2}{2}}$$

Ответ: $p_\eta(y_1,y_2)=\dfrac{|y_1|}{\pi}e^{-\frac{y_1^2}{2}}$

Задача 30

Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области ABC., т.е.

$$p(x,y)=\begin{cases}1/S & (x,y)\in ABC\\ 0 & (x,y)\notin ABC\end{cases}\quad S-\text{площадь }\Delta ABC$$

Определить маргинальные плотности распределения $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$, мат. ожидания $M\xi$, $M\eta$, дисперсии $D\xi$, $D\eta$, коэф. корреляции r. Являются ли ξ и η независимыми?

x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C
1	1	1	–1	0	0

$$\Rightarrow\ \begin{matrix}x\in(0,1);y\in(-x;x)\\ y\in(-1;1);x\in(0;|y|)\end{matrix};\ S=\frac{ah}{2}=1$$

Маргинальные плотности распределения найти несложно:

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\int_{-x}^{x}dy=2x\quad\text{для } x\in(0;1)$$

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\int_{0}^{|y|}dx=|y|\quad\text{для } y\in(-1;1)$$

Мат. ожидания и дисперсии также находятся легко:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p_\xi(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$M\eta=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot p_\eta(y)dy=\int_0^1 y^2dy+\int_{-1}^{0}(-y^2)dy=\frac{y^3}{3}\Big|_0^1-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^0=0$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2\cdot p_\xi(x)dx=\int_0^1(2x^3-4x^2M\xi+2xM^2\xi)dx=\frac{9-8}{18}=\frac{1}{18}$$

$$D\eta=\int_{-\infty}^{\infty}(y-M\eta)^2\cdot p_\eta(y)dy=\int_0^1 y^3dy-\int_{-1}^{0}y^3dy=\frac{y^4}{4}\Big|_0^1-\frac{y^4}{4}\Big|_{-1}^0=\frac{1}{2}$$

Коэффициент корреляции определяется следующим образом:

$$r=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)(y-M\eta)p(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}(x-2/3)ydydx=0$$

Определим, являются ли ξ и η независимыми:

$$p_\xi(x)p_\eta(y)=2x|y|\ne 1=p(x,y)\Rightarrow \xi\text{ и }\eta-\text{зависимы}$$

Ответ: $p_\xi(x)=2x$; $p_\eta(y)=|y|$; $M\xi=2/3$; $M\eta=0$; $D\xi=1/18$; $D\eta=1/2$; ξ и η являются зависимыми величинами.

Задача 31

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания $M\xi$ менее чем на $N\sigma$, где $\sigma = \sqrt{D\xi}$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ; N – номер варианта, т.е. N=9.

Запишем неравенство Чебышева:

$$P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le D\xi/\varepsilon^2$$

Величина ε характеризует отклонение случайной величины от своего математического ожидания, т.е. $\varepsilon=N\sigma$. Тогда:

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \ge 1 - D\xi/\varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 1/81 \le P\{|\xi - M\xi| < 9\sigma\} < 1 \Rightarrow P\{|\xi - M\xi| < 9\sigma\} \in [\tfrac{80}{81};1)$$

Ответ: $P\{|\xi - M\xi| < 9\sigma\} \in [\tfrac{80}{81};1)$

Задача 32

Случайная величина ξ_i с одинаковой вероятностью может принимать одно из двух значений: i^α или $-i^\alpha$. Выяснить, удовлетворяет ли последовательность $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_i,\ldots$ попарно независимых случайных величин закону больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1; \quad \varepsilon > 0.$$

Решить задачу для двух значений параметра α: α_1 и α_2.

($\alpha_1 = -5$; $\alpha_2 = 0{,}08$)

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины ξ_i:

$$M\xi_i = \tfrac{i^\alpha}{2} - \tfrac{i^\alpha}{2} = 0; D\xi_i = M\xi_i^2 - M^2\xi_i = M\xi_i^2 = \tfrac{i^\alpha}{2} + \tfrac{i^\alpha}{2} = i^{2\alpha}$$

Используем неравенство Чебышева:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_i; P\left(\frac{|S_n - MS_n|}{n} \ge \varepsilon\right) \le \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^{2\alpha}}{n^2\varepsilon^2}$$

Перейдем к пределам для $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n - MS_n|}{n} \ge \varepsilon\right) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0{,}5 \\ 0{,}5 & \alpha = 0{,}5 \\ \infty & \alpha > 0{,}5 \end{cases}$$

Т.о. последовательность удовлетворяет закону больших чисел при $\alpha<0{,}5$, то есть, как для α_1, так и для α_2.

Задача 33

На отрезке $[0,\alpha]$ случайным образом выбраны n чисел, точнее, рассматриваются n независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, равномерно распределенных на отрезке $[0,\alpha]$. Найти вероятность того, что их сумма заключена между x_1 и x_2, т.е. $P\left\{x_1 < \sum_{i=1}^{n}\xi_i < x_2\right\}$.

α	n	x_1	x_2
1/11	1452	64	69

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/11 & x \in [0{,}11] \\ 0 & x \notin [0{,}11] \end{cases} \Rightarrow M\xi = \int_0^{11} 11x\,dx = \frac{11x^2}{2}\Big|_0^{11} = \frac{1}{22}$$

$$D\xi = \int_0^{11}\left(11x^2 - x + 1/44\right)dx = \left(\frac{11x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{44}\right)\Big|_0^{11} = \frac{1}{1452}; \sigma = \frac{1}{22\sqrt{3}}$$

Используем центральную предельную теорему:

$$P\{y_1 < \sum_{i=1}^{1452}\frac{\xi_i - M\xi}{\sigma\sqrt{n}} < y_2\} \approx \Phi(y_2) - \Phi(y_1)$$

$$P\{y_1 < \sum_{i=1}^{1452}(\xi_i - M\xi) < y_2\} \approx \Phi(y_2) - \Phi(y_1)$$

$$P\{y_1 < \sum_{i=1}^{1452}\xi_i - nM\xi < y_2\} \approx \Phi(y_2) - \Phi(y_1)$$

$$P\{\underbrace{y_1 + 66}_{x_1} < \sum_{i=1}^{1452}\xi_i < \underbrace{y_2 + 66}_{x_2}\} \approx \Phi(y_2) - \Phi(y_1)$$

Выразим y_1 и y_2 через x_1 и x_2:

$y_1 = x_1 - 66; \quad y_2 = x_2 - 66$

Таким образом:

$$P\left\{x_1 < \sum_{i=1}^{n}\xi_i < x_2\right\} \approx \Phi(x_2 - 66) - \Phi(x_1 - 66) \approx 0{,}976$$

Ответ: $P\left\{x_1 < \sum_{i=1}^{n}\xi_i < x_2\right\} \approx 0{,}976$

Задача 34

Известно, что случайная величина ξ имеет распределение Пуассона $P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$, неизвестным является параметр a. Используя метод моментов, найти по реализации выборки $(x_1, x_2, ..., x_8)$ значение оценки a* неизвестного параметра a.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	n
43	39	41	45	36	42	41	37	70

Для применения метода моментов нужно найти математическое ожидание случайной величины ξ и выборочное среднее:

$$M\xi = \sum_k x_k p_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}e^{-a} = a; \quad \overline{X} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} x_k = 40{,}5$$

Выборочное среднее принимает значение, близкое к $M\xi$. Отсюда найдем оценку параметра a:

$\overline{X} = a^* \Rightarrow a^* = 40{,}5$

Ответ: $a^* = 40{,}5$.

Задача 35

Известно, что случайная величина ξ имеет биномиальное распределение $P(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, неизвестным является параметр p. Используя метод максимального правдоподобия, найти по реализации выборки $(x_1, x_2, ..., x_8)$ значение оценки p* неизвестного параметра p.

Построим функцию правдоподобия L(p) и найдем p* такое, что L(p*) – максимальна:

$$L(x_{1..8}, p) = \prod_{k=1}^{8} P(\xi = x_k) = \underbrace{(70!)^8 \left[\prod_{k=1}^{8} \frac{1}{(70-x_k)!x_k!}\right]}_{A} p^{\overbrace{\sum_{k=1}^{8} x_k}^{X}} (1-p)^{560 - \sum_{k=1}^{8} x_k}$$

$$L(p) = Ap^X (1-p)^{560-X}; \quad \frac{dL(p)}{dp} = Ap^X (1-p)^{560-X} \left(\frac{X - 560p}{p(1-p)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - 560p^* = 0 \Rightarrow p^* = \frac{X}{560} = \frac{1}{560}\sum_{k=1}^{8} x_k \approx 0{,}579$$

Ответ: $p^* = 0{,}579$.

Задача 36

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с неизвестным мат. ожиданием a и известной дисперсией σ^2. По выборке $(x_1, x_2, ..., x_n)$ объема n вычислено выборочное среднее $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a^*$. Определить доверительный интервал для параметра a, отвечающий заданной дов. вероятности P.

a*	n	σ^2	P
110	150	100	0,95

Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной случайной величины при известной дисперсии σ^2 имеет вид:

$$\overline{X} - u_P \sigma / \sqrt{n} < a < \overline{X} + u_P \sigma / \sqrt{n}$$

Здесь $\overline{X}$ – выборочное среднее, т.е. $\overline{X}$=a*. Параметр u_P определяется с помощью таблицы и для P=0,95 равен ≈1,96. Осталось определить доверительный интервал численно:

$$110 - 1{,}96 \cdot 10/\sqrt{150} < a < 110 + 1{,}96 \cdot 10/\sqrt{150} \Rightarrow 108{,}4 < a < 111{,}6$$

Ответ: доверительный интервал a∈(108,4;111,6).

Задача 37

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с неизвестными математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. По выборке $(x_1, x_2, ..., x_n)$ объема n вычислены оценки $a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a^*)^2$ неизвестных параметров. Найти дов. интервал для математического ожидания a, отвечающий доверительной вероятности P.

a*	σ^2*	n	P
2,1	0,5	31	0,9

Доверительный интервал для мат. ожидания a нормальной случ. величины при неизвестной дисперсии σ^2 имеет вид:

$$\overline{X} - t_P \sigma / \sqrt{n} < a < \overline{X} + t_P \sigma / \sqrt{n}$$

Здесь $\overline{X}$ – выборочное среднее, т.е. $\overline{X}$=a*. Параметр t_P определяется с помощью таблицы и для P=0,9 и n=31 равен ≈1,697. Осталось определить доверительный интервал численно:

$$2{,}1 - 1{,}697 \cdot \sqrt{0{,}5/31} < a < 2{,}1 + 1{,}697 \cdot \sqrt{0{,}5/31} \Rightarrow 1{,}884 < a < 2{,}316$$

Ответ: доверительный интервал a∈(1,884;2,316).

Задача 38

В результате n опытов получена несмещенная оценка $(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a^*)^2$ для дисперсии нормальной случайной величины. Найти доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности P.

n	σ^{2*}	P
25	50	0,8

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины имеет вид:

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}}$$

Здесь $\chi^2{}_{(1)}$, $\chi^2{}_{(2)}$ – это корни следующих уравнений:

$$\int_0^{\chi^2_{(1)}} p_{n-1}(x)dx = \frac{1+P}{2}$$

$$\int_{\chi^2_{(2)}}^{\infty} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-P}{2}$$

Здесь $p_{n-1}(x)$ – плотность распределения хи-квадрат с n–1 степенями свободы. Корни этих уравнений находятся с помощью таблицы, входами в которую служат параметры ν и α:

$$\nu = n-1 = 24; \quad \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{1+P}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-P}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \chi^2_{(1)} = 15{,}66 \\ \chi^2_{(2)} = 33{,}2 \end{matrix}$$

Теперь, зная все необходимые параметры, определить доверительный интервал несложно:

$$\frac{24\cdot 50}{33{,}2} < \sigma^2 < \frac{24\cdot 50}{15{,}66} \Rightarrow 36{,}145 < \sigma^2 < 76{,}628$$

Ответ: доверительный интервал – $\sigma^2 \in (36{,}145; 76{,}628)$.

Задача 39

В серии из n выстрелов по мишени наблюдалось m попаданий. Найти доверительный интервал для вероятности p попадания в мишень при доверительной вероятности P=0,95.

n	m
30	18

В данной ситуации каждый выстрел является независимым испытанием. Число попаданий существенно отличается от нуля и от числа выстрелов, значит p не близко к нулю или единице, а n достаточно велико. Тогда можно применить асимптотику Муавра-Лапласа и получить следующую формулу для доверительного интервала для p:

$p_1 < p < p_2$

$$p_{12} = \frac{30}{30 + u_P{}^2}\left(p^* + \frac{u_P{}^2}{60} \mp \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{30} + \left(\frac{u_P}{60}\right)^2}\right), \quad p^* = \frac{18}{30}$$

В этой формуле u_P определяется по заданной доверительной вероятности P=0,95 и составляет ≈1,96.

Подставив численные значения в эту формулу, получим:

$0{,}504 < p < 0{,}673$

Ответ: Доверительный интервал для p: $0{,}504 < p < 0{,}673$

Задача 40

В серии из n опытов событие A не наступило ни разу. Определить число опытов n, при котором верхняя доверительная граница для вероятности P(A) равна заданному числу p_1. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

$(p_1 = 0{,}09)$

Для данного случая, когда в серии из n независимых испытаний событие не произошло ни разу, верхняя доверительная граница равна $1 - \sqrt[n]{1-0{,}95}$. Тогда:

$$p_1 = 1 - \sqrt[n]{1-0{,}95} \Rightarrow \sqrt[n]{0{,}05} = 1 - p_1 \Rightarrow 0{,}05 = (1-p_1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \log_{(1-p_1)} 0{,}05 \approx 31{,}765; \quad [n] = 32$$

Ответ: Число опытов равно 32.

Задача 41

Для контроля взяты 200 узлов, собранных на ученическом конвейере. Число узлов m_i, при сборке которых пропущено i операций, сведено в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	
m_i	41	62	45	22	16	8	4	2	Всего 200

Согласуются ли полученные результаты с распределением Пуассона ($P(\xi=i)=\frac{a^i}{i!}e^{-a}$, где ξ – случайное число пропущенных операций) по критерию χ^2 при уровне значимости α? Решить задачу для заданного значения параметра a и для случая, когда параметр a оценивается по выборке.

a	α
1,78	0,01

Для использования критерия χ^2 разобьем числовую ось на r=7 промежутков, объединив случаи ξ=6 и ξ=7, чтобы в каждом разряде было не менее 5 выборочных значений. Величина χ^2 характеризует согласованность гипотезы с опытными данными:

$$\chi^2=\sum_{i=0}^{6}\frac{200}{p_i}\left(\frac{m_i}{200}-p_i\right)^2=\sum_{i=0}^{6}\frac{(m_i-200p_i)^2}{200p_i}\approx 17{,}084$$

Здесь m_i берется из таблицы (кроме i=6, когда m_6 – это сумма табличных значений m_6 и m_7), а $p_i=P(\xi=i)$ (кроме i=6, когда $p_6=P(\xi=6)+P(\xi=7)$). Крит. величину χ_α^2 найдем из таблицы, входами в которую служат параметры $\nu=r-1=6$ и α:

$$\chi_\alpha^2\approx 16{,}81$$

Так как $\chi_\alpha^2<\chi^2$, то на заданном уровне значимости гипотеза отвергается.

Для распределения Пуассона a* известна из задачи 34:

$$a^*=\overline{X}=\frac{1}{200}\sum_{i=0}^{7}i\cdot m_i=1{,}8$$

Найдем для нее значение χ^2:

$$\chi^2=\sum_{i=0}^{6}\frac{(m_i-200p_i)^2}{200p_i}\approx 16{,}54$$

Так как $\chi_\alpha^2>\chi^2$, то на заданном уровне значимости гипотеза не противоречит опытным данным для случая, когда параметр a оценивается по выборке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основной комбинаторный принцип

Если некоторый первый выбор можно сделать t способами, для каждого первого второй можно сделать k способами, для каждой пары третий можно сделать s способами и т.д., то число способов для последовательности таких выборов равно t·k·s·...

Способы составления выборки

Повторный – выбранный элемент возвращается в совокупность из n элементов и может быть выбран вновь. В этом случае существует n^r способов составить выборку из r элементов.

Бесповторный – выбранный элемент не возвращается в совокупность из n элементов. В этом случае существует n!/(n–r)! способов составить выборку из r элементов.

Классическое определение вероятности

Если исходы опыта равновозможны, то вероятностью события называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию к общему числу исходов опыта.

Геометрическое определение вероятности

Пусть точку A бросают наугад в область G, причем равновозможно попадание в любую точку этой области. Тогда вероятность попасть в область g:

$P(A\in g)=\frac{\|g\|}{\|G\|}$, где мера – длина, площадь, объем и т.д., в зависимости от характера области.

Основные определения

Если при каждом опыте событие происходит, то его называют *достоверным* и обозначают Ω.

Если при воспроизведении опыта событие произойти не может, то его называют *невозможным* и обозначают $\varnothing$.

Если при воспроизведении опыта событие может произойти, а может и нет, то это – *случайное* событие.